Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Théme : Suites réelles

Montrer que la suite est convergente

Exercice :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = (U_n - 1)^2 + 1, \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$$

1°) Calculer U_1 et U_2.

2°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$: $1 \leq U_n \leq \dfrac{3}{2}$.

b) Etudier la monotonie de (U_n).

c) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

3°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$: $0 \leq U_{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{2}(U_n - 1)$.

b) Déduire que pour tout $n \in IN$: $U_n - 1 \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

c) Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

1°) $U_1 = (U_0 - 1)^2 + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \boxed{\frac{5}{4}}$

$U_2 = (U_1 - 1)^2 + 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1 = \boxed{\frac{17}{16}}$

2) a)

Pour $n = 0$ $\quad 1 \leqslant U_0 = \frac{3}{2} \leqslant \frac{3}{2}$ Vrai

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $1 \leqslant U_n \leqslant \frac{3}{2}$

et montrons que $1 \leqslant U_{n+1} \leqslant \frac{3}{2}$

.) On a $\quad 1 \leqslant U_n \leqslant \frac{3}{2}$

$\Rightarrow 0 \leqslant U_n - 1 \leqslant \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0 \leqslant (u_n - 1)^2 \leqslant \frac{1}{4}$

$\Rightarrow 1 \leqslant (u_n - 1)^2 + 1 \leqslant \frac{5}{4} \leqslant \frac{3}{2}$

$\Rightarrow 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{3}{2}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)^2 + 1 - u_n$

$= u_n^2 - 2u_n + 1 + 1 - u_n$

$= u_n^2 - 3u_n + 2$.

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

Donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ainsi (u_n) est décroissante.

c) (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge.

; On pose $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ avec $1 \leqslant l \leqslant \frac{3}{2}$

et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = (x-1)^2 + 1$

f est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier en l.

Donc $f(l) = l$

$\Leftrightarrow (l-1)^2 + 1 = l$

$\Leftrightarrow l^2 - 2l + 1 + 1 = l$

$\Leftrightarrow l^2 - 3l + 2 = 0$

$\Leftrightarrow l = 1$ ou $l = 2$ impossible

$\Leftrightarrow l = 1$ car $1 \leqslant l \leqslant \frac{3}{2}$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

3)a) $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} \geqslant 1$

Donc $u_{n+1} - 1 \geqslant 0$

a) $u_{n+1} - 1 = (u_n - 1)^2 + 1 - 1$

$= (u_n - 1)(u_n - 1)$

or $u_n \leqslant \frac{3}{2} \Rightarrow u_n - 1 \leqslant \frac{1}{2}$

$\leqslant \frac{1}{2}(u_n - 1)$

Ainsi $\boxed{0 \leqslant u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(u_n - 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

b) pour $n = 0$; $u_0 - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2^{0+1}}$

Marie

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n - 1 \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$

et montrons que $u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2^{n+2}}$.

On a $u_n - 1 \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{2}(u_n - 1) \leqslant \frac{1}{2^{n+2}}$

or $u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(u_n - 1)$

Ainsi $u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2^{n+2}}$

Conclusion: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n - 1 \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}}$

c) On a $0 \leq u_n - 1 \leq \frac{1}{2^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$ car $2 > 1$

$2^{n+1} \to +\infty$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - 1 = 0$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$